891

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.

А. Эйнштейн

К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ*

Известно, что электродинамика Максвелла в современном ее виде приводит в применении к движущимся телам к асимметрии, которая несвойственна, по-видимому, самим явлениям. Вспомним, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником с током. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как, согласно обычному представлению, два случая, в которых движется либо одно, либо другое из этих тел, должны быть строго разграничены. В самом деле, если движется магнит, а проводник покоится, то вокруг магнита возникает электрическое поле, обладающее некоторым количеством энергии, которое в тех местах, где находятся части проводника, порождает ток. Если же магнит находится в покое, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля; зато в проводнике возникает электродвижущая сила, которой самой по себе не соответствует никакая энергия, но которая — при предполагаемой тождественности относительного движения в обоих интересующих нас случаях — вызывает электрические токи той же величины и того же направления, что и электрическое поле в первом случае.

Примеры подобного рода, как и неудавшиеся попытки обнаружить движение Земли относительно «светоносной среды», ведут к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя и даже, более того,— к предположению, что для всех координатных систем, для

*Zur Eiektrodynamik der beivegter Korper. Ann. Phys., 1905, 17, 891—921.

которых справедливы уравнения механики, справедливы те же самые электродинамические и оптические законы, как это уже доказано для величин первого порядка. Это предположение (содержание которого в дальнейшем будет называться «принципом относительности») мы намерены превратить в предпосылку и сделать, кроме того, добавочное допущение, находящееся с первым лишь в кажущемся противоречии, а именно, что свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью $\boldsymbol{V}$, не зависящей от состояния движения излучающего тела. Эти две предпосылки достаточны для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для покоящихся тел, построить простую, свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Введение «светоносного эфира» окажется при этом излишним, поскольку в предлагаемой теории не вводится «абсолютно покоящееся пространство», наделенное особыми свойствами, а также ни одной точке пустого пространства, в котором протекают электромагнитные процессы, не приписывается какой-нибудь вектор скорости.

Развиваемая теория основывается, как и всякая другая электродинамика, на кинематике твердого тела, так как суждения всякой теории касаются соотношений между твердыми телами (координатными системами), часами и электромагнитными процессами. Недостаточное понимание этого обстоятельства является корнем тех трудностей, преодолевать которые приходится теперь электродинамике движущихся тел.

I. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. Определение одновременности

Пусть имеется координатная система, в которой справедливы уравнения механики Ньютона. Для отличия от вводимых позже координатных систем и для уточнения терминологии назовем эту координатную систему «покоящейся системой».

Если некоторая материальная точка находится в покое относительно этой координатной системы, то ее положение относительно последней может быть определено методами эвклидовой геометрии с помощью твердых масштабов и выражено в декартовых координатах.

Желая описать *движение* какой-нибудь материальной точки, мы задаем значения ее координат как функций времени. При этом следует иметь в виду, что подобное математическое описание имеет физический смысл только тогда, когда предварительно выяснено, что подразумевается здесь под «временем». Мы должны обратить внимание на то, что все наши суждения, в которых время играет какую-либо роль, всегда являются суждениями об *одновременных событиях*. Если я, например, говорю: «Этот поезд прибывает сюда в 7 часов»,—

то это означает примерно следующее: «Указание маленькой стрелки моих часов на 7 часов и прибытие поезда суть одновременные события».[1]

Может показаться, что все трудности, касающиеся определения «времени», могут быть преодолены тем, что вместо слова «время» я напишу «положение маленькой стрелки моих часов». Такое определение, действительно, достаточно в случае, когда речь идет о том, чтобы определить время лишь для того самого места, в котором как раз находятся часы; однако это определение уже недостаточно, как только речь будет идти о том, чтобы связать друг с другом во времени ряды событий, протекающих в различных местах, или, что сводится к тому же, установить время для тех событий, которые происходят в местах, удаленных от часов.

Желая определить время событий, мы могли бы, конечно, удовлетвориться тем, что заставили бы некоторого наблюдателя, находящегося с часами в начале координат, сопоставлять соответствующее положение стрелки часов с каждым световым сигналом, идущим к нему через пустоту и дающим знать о регистрируемом событии. Такое сопоставление связано, однако, с тем неудобством, известным нам из опыта, что оно не будет независимым от местонахождения наблюдателя, снабженного часами. Мы придем к гораздо более практическому определению путем следующих рассуждений.

Если в точке A пространства помещены часы, то наблюдатель, находящийся в A, может устанавливать время событий в непосредственной близости от A путем наблюдения одновременных с этими событиями положений стрелок часов. Если в другой точке B пространства также имеются часы (мы добавим: «точно такие же часы, как в точке A»), то в непосредственной близости от B тоже возможна временная оценка событий находящимся в B наблюдателем. Однако невозможно без дальнейших предположений сравнивать во времени какое-либо событие в A с событием в B; мы определили пока только «A-время» и «B-время», но не общее для A и B «время». Последнее можно установить, *вводя определение*, что «время», необходимое для прохождения света из A в B, равно «времени», требуемому для прохождения света из B в A. Пусть в момент t_A по «A-времени» луч света выходит из A в B, отражается в момент t_B по «B-времени» от B к A и возвращается назад в A в момент t'_A по «A-времени». Часы в A и B будут идти, согласно определению, синхронно, если

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Мы сделаем допущение, что это определение синхронности можно дать непротиворечивым образом и притом для сколь угодно многих точек и что, таким образом, справедливы следующие утверждения:

[1] Здесь не будет обсуждаться неточность, содержащаяся в понятии одновременности двух событий, происходящих (приблизительно) в одной и том же месте, которая должна быть преодолена также с помощью некоторой абстракции.

1) если часы в B идут синхронно с часами в A, то часы в A идут синхронно с часами в B;

2) если часы в A идут синхронно как с часами в B, так и с часами в C, то часы в B и C также идут синхронно относительно друг друга.

Таким образом, пользуясь некоторыми (мысленными) физическими экспериментами, мы установили, что нужно понимать под синхронно идущими, находящимися в различных местах покоящимися часами, и благодаря этому, очевидно, достигли определения понятий: «одновременность» и «время». «Время» события — это одновременное с событием показание покоящихся часов, которые находятся в месте события и которые идут синхронно с некоторыми определенными покоящимися часами, причем с одними и теми же часами при всех определениях времени.

Согласно опыту, мы положим также, что величина

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

есть универсальная константа (скорость света в пустоте).

Существенным является то, что мы определили время с помощью покоящихся часов в покоящейся системе: будем называть это время, принадлежащее к покоящейся системе, «временем покоящейся системы».

§ 2. Об относительности длин и промежутков времени

Дальнейшие соображения опираются на принцип относительности и на принцип постоянства скорости света. Мы формулируем оба принципа следующим образом.

Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся.

Каждый луч света движется в «покоящейся» системе координат с определенной скоростью V, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом.

При этом

$$\textbf{скорость} = \frac{\textbf{Путь луча света}}{\textbf{Промежуток времени}},$$

причем «промежуток времени» следует понимать в смысле определения в §1.

Пусть нам дан покоящийся твердый стержень, и пусть длина его, измеренная также покоящимся масштабом, есть L. Теперь представим себе, что стержню, ось которого направлена по оси X покоящейся координатной системы, сообщается равномерное и параллельное оси X поступательное движение (со скоростью v) в сторону возрастающих значений x. Поставим теперь вопрос о длине *движущегося* стержня, которую мы полагаем определенной с помощью следующих двух операций:

а) наблюдатель движется вместе с указанным масштабом и с измеряемым стержнем и измеряет длину стержня непосредственно путем прикладывания масштаба так же, как если бы измеряемый стержень, наблюдатель и масштаб находились в покое;

б) наблюдатель устанавливает с помощью расставленных в покоящейся системе синхронных, в смысле §1, покоящихся часов, в каких точках покоящейся системы находятся начало и конец измеряемого стержня в определенный момент времени t. Расстояние между этими двумя точками, измеренное использованным выше, но уже покоящимся масштабом, есть длина, которую можно обозначить как «длину стержня».

Согласно принципу относительности, длина, определяемая операцией «а», которую мы будем называть «длиной стержня в движущейся системе», должна равняться длине l покоящегося стержня.

Длину, устанавливаемую операцией «б», которую мы будем называть «длиной (движущегося) стержня в покоящейся системе», мы определим, основываясь на наших двух принципах, и найдем, что она отлична от l.

В обычно применяемой кинематике принимается без оговорок, что длины, определенные посредством двух упомянутых операций, равны друг другу, или, иными словами, что движущееся твердое тело в момент времени t в геометрическом отношении вполне может быть заменено *тем же* телом, когда оно *покоится* в определенном положении.

Представим себе, что к обоим концам стержня (A и B) прикреплены часы, которые синхронны с часами покоящейся системы, т. е. показания их соответствуют «времени покоящейся системы» в тех местах, в которых эти часы как раз находятся; следовательно, эти часы «синхронны в покоящейся системе».

Представим себе далее, что у каждых часов находится движущийся с ними наблюдатель и что эти наблюдатели применяют к обоим часам установленный в § 1 критерий синхронности хода двух часов. Пусть в момент времени[1] t_A из A выходит луч света, отражается в B в момент времени t_B и возвращается назад в A в момент времени t'_A. Принимая во внимание принцип постоянства скорости света, находим

[1] Здесь «время» означает «время покоящейся системы» и вместе с тем «положение стрелки движущихся часов, которые находятся в том месте, о котором идет речь.

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \quad \text{и} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

где $\boldsymbol{r_{AB}}$ — длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе. Итак, наблюдатели, движущиеся вместе со стержнем, найдут, что часы в точках ***A*** и ***B*** не идут синхронно, в то время как наблюдатели, находящиеся в покоящейся системе, объявили бы эти часы синхронными. Итак, мы видим, что не следует придавать *абсолютного* значения понятию одновременности. Два события, одновременные при наблюдении из одной координатной системы, уже не воспринимаются как одновременные при рассмотрении из системы, движущейся относительно данной системы.

§ 3. Теория преобразования координат и времени от покоящейся системы к системе, равномерно и прямолинейно движущейся относительно первой

Пусть в «покоящемся» пространстве даны две координатные системы, каждая с тремя взаимно-перпендикулярными осями, выходящими из одной точки. Пусть оси ***X*** обеих систем совпадают, а оси ***Y*** и ***Z*** — соответственно параллельны. Пусть каждая система снабжена масштабом и некоторым числом часов, и пусть оба масштаба и все часы в обеих системах в точности одинаковы.

Пусть теперь началу координат одной из этих систем (***k***) сообщается (постоянная) скорость ***v*** в направлении возрастающих значений ***x*** другой, покоящейся системы (***K***) эта скорость передается также координатным осям, а также соответствующим масштабам и часам. Тогда каждому моменту времени ***t*** покоящейся системы (***K***) соответствует определенное положение осей движущейся системы, и мы из соображений симметрия вправе допустить, что движение системы ***k*** может быть таким, что оси движущейся системы в момент времени ***t*** (через ***t*** всегда будет обозначаться время покоящейся системы) будут параллельны осям покоящейся системы.

Представим себе теперь, что пространство размечено как в покоящейся системе ***K*** посредством покоящегося в ней масштаба, так и в движущейся системе ***k*** посредством движущегося с ней масштаба, и что, таким образом, получены координаты ***x***, ***y***, ***z*** и соответственно $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$. Пусть посредством покоящихся часов, находящихся в покоящейся системе, и с помощью световых сигналов указанным в §1 способом определяется время ***t*** покоящейся системы для всех тех точек последней, в которых находятся часы. Пусть далее таким же образом определяется время $\boldsymbol{\tau}$ движущейся системы для всех точек этой системы, в которых находятся покоящиеся относительно последней часы, указанным в §1 способом световых сигналов между точками, в которых эти часы находятся.

Каждому набору значений x, y, z, t, которые полностью определяют место и время событий в покоящейся системе, соответствует набор значений ξ, η, ζ, τ, устанавливающий это событие в системе k, и теперь необходимо найти систему уравнении, связывающих эти величины.

Прежде всего ясно, что эти уравнения должны быть *линейными* в силу свойства однородности, которое мы приписываем пространству и времени.

Если мы положим $x' = x - vt$ то ясно, что точке, покоящейся в системе k, будет принадлежать определенный, независимый от времени набор значений x', y, z. Сначала мы определим τ как функцию от x', y, z, t. Для этой цели мы должны выразить с помощью некоторых соотношений, что τ по своему смыслу есть не что иное, как совокупность показании покоящихся в системе k часов, которые в соответствии с изложенным в §1 правилом идут синхронно.

Пусть из начала координат системы k в момент времени τ_0 посылается луч света вдоль оси X в точку x' и отражается оттуда в момент времени τ_1 назад, в начало координат, куда он приходит в момент времени τ_2; тогда должно существовать соотношение

$$\tfrac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

или, выписывая аргументы функции τ и применяя принцип постоянства скорости света в покоящейся системе, имеем

$$\tfrac{1}{2}\left[\tau\,(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] = \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Если x' взять бесконечно малым, то отсюда следует:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Необходимо заметить, что мы могли бы вместо начала координат выбрать всякую другую точку в качестве отправной точки луча света, и поэтому только что полученное уравнение справедливо для всех значений x', y, z, t.

Если принять во внимание, что свет вдоль осей $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ при наблюдении из покоящейся системы всегда распространяется со скоростью $\sqrt{V^2 - v^2}$, то аналогичное рассуждение, примененное к этим осям, дает

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 .$$

Так как $\boldsymbol{\tau}$ — *линейная* функция, то из этих уравнений следует

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\, x'\right),$$

где $\boldsymbol{a}$ — неизвестная пока функция $\boldsymbol{\varphi(v)}$ и ради краткости принято, что в начале координат системы $\boldsymbol{k}$ при $\boldsymbol{\tau} = 0$ также и $\boldsymbol{t} = 0$.

Пользуясь этим результатом, легко найти величины ξ, $\boldsymbol{\eta}$, ζ. С этой целью (как этого требует принцип постоянства скорости света в сочетании с принципом относительности) нужно с помощью уравнений выразить то обстоятельство, что свет при измерении в движущейся системе также распространяется со скоростью $\boldsymbol{V}$. Для луча света, вышедшего в момент времени $\boldsymbol{\tau} = 0$ в направлении возрастающих ξ, имеем

$$\xi = V\tau$$

или

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\, x'\right).$$

Но относительно начала координат системы $\boldsymbol{k}$ луч света при измерении, произведенном в покоящейся системе, движется со скоростью $\boldsymbol{V - v}$, вследствие чего

$$\frac{x'}{V - v} = t .$$

Подставив это значение $\boldsymbol{t}$ в уравнение для ξ, получим

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}\, x' .$$

Рассматривая лучи, движущиеся вдоль двух других осей, находим

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right),$$

причем

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

следовательно,

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y$$

и

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z.$$

Подставляя вместо x' его значение, получаем

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$
$$\eta = \varphi(v)y,$$
$$\zeta = \varphi(v)z,$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

а φ — неизвестная пока функция от v.

Если не делать никаких предположений о начальном положении движущейся системы и о нулевой точке переменной, то к правым частям этих уравнений необходимо приписать по одной аддитивной постоянной.

Теперь мы должны показать, что каждый луч света — при измерении в движущейся системе — распространяется со скоростью V, если это утверждение, согласно нашему допущению, справедливо в покоящейся системе;

мы еще не доказали, что принцип постоянства скорости света совместим с принципом относительности.

Пусть в момент времени $t = \tau = 0$ из общего в этот момент для обеих систем начала координат посылается сферическая волна, которая распространяется в системе K со скоростью V. Если (x, y, z) есть точка, в которую приходит эта волна, то мы имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 .$$

Преобразуем это уравнение с помощью записанных выше формул преобразования; тогда получим

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 .$$

Итак, рассматриваемая волна, наблюдаемая в движущейся системе, также является шаровой волной, распространяющейся со скоростью V. Тем самым доказано, что наши два основных, принципа совместимы.

Выведенные формулы преобразования содержат неизвестную функцию φ от v, которую мы теперь определим.

Для этой цели вводим еще одну, третью координатную систему K' которая относительно системы k совершает поступательное движение параллельно оси Ξ таким образом, что ее начало координат движется со скоростью — v по оси Ξ. Пусть в момент времени $t = 0$ все три начала координат совпадают, и пусть при t =x = y = z = 0 время t' в системе K' равно 0. Пусть x', y', z' суть координаты, измеренные в системе K'.

После двукратного применения наших формул преобразования получаем

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t ,\\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x ,\\
y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y ,\\
z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z .
\end{aligned}$$

Так как соотношения между x', y', z' и x, y, z не содержат времени t, то системы K и K' находятся в покое относительно друг друга, и ясно, что преобразование из K в K' должно быть тождественным преобразованием. Следовательно,

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1 .$$

Выясним теперь физический смысл функции **φ**(***v***). Для этого рассмотрим ту часть оси ***Н*** системы ***k***, которая лежит между точками ξ=0, **η**=0, ζ=0 и ξ=0, **η**=***l***, ζ=0. Эта часть оси ***Н*** представляет собой стержень, движущийся перпендикулярно своей оси со скоростью ***v*** относительно системы ***K***. Концы этого стержня в системе ***K*** имеют следующие координаты:

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

и

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0.$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе ***K***, равна ***l***/**φ**(***v***); тем самым выяснен и физический смысл функции **φ**(***v***). В самом деле, из соображений симметрии теперь ясно, что измеренная в покоящейся системе длина некоторого стержня, движущегося перпендикулярно своей оси, может зависеть только от величины скорости, но не от ее направления и знака. Следовательно, длина движущегося стержня, измеренная в покоящейся системе, не изменяется, если ***v*** заменить через — ***v***. Отсюда следует:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

или

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Из этого и найденного ранее соотношений следует, что **φ**(***v***) = 1, так что найденные формулы преобразования переходят в следующие:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

§4. Физический смысл полученных уравнений для движущихся твердых тел и движущихся часов

Рассмотрим твердый шар[1] радиуса $\boldsymbol{R}$, находящийся в покое относительно движущейся системы $\boldsymbol{k}$, причем центр шара совпадает с началом координат системы $\boldsymbol{k}$. Уравнение поверхности этого шара, движущегося относительно системы $\boldsymbol{K}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$, имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Уравнение этой поверхности, выраженное через x, y, z, в момент времени $t = 0$ будет

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Следовательно, твердое тело, которое в покоящемся состоянии имеет форму шара, в движущемся состоянии — при наблюдении из покоящейся системы — принимает форму эллипсоида вращения с полуосями

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

В то время как размеры шара (а следовательно, и всякого другого твердого тела любой формы) по осям $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ от движения не изменяются, размеры по оси $\boldsymbol{X}$ сокращаются в отношении $1:\sqrt{1-(v/V)^2}$, и тем сильнее, чем больше $\boldsymbol{v}$. При $v = V$ все движущиеся объекты, наблюдаемые из «покоящейся» системы, сплющиваются и превращаются в плоские фигуры. Для скоростей, превышающих скорость света, наши рассуждения теряют смысл; впрочем, из дальнейших рассуждений будет видно, что скорость света в нашей теории физически играет роль бесконечно большой скорости. Ясно, что те же

[1] Т. е. тело, которое в состоянии покоя имеет шаровую форму.

результаты получаются для тел, находящихся в покое в «покоящейся» системе, но рассматриваемые из системы, которая равномерно движется.

Представим себе, далее, что часы, находясь в покое относительно покоящейся системы, показывают время ***t***, а, находясь в покое относительно движущейся системы, показывают время ***τ***. Пусть они помещены в начале координат системы ***k***. Как быстро идут эти часы при рассмотрении из покоящейся системы?

Величины ***x***, ***t***, ***τ***, относящиеся к месту, в котором находятся эти часы, очевидно, связаны соотношениями

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

и

$$x = vt.$$

Таким образом,

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

откуда следует, что показание часов (наблюдаемое из покоящейся системы) отстает в секунду на $\left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\right)$ сек, или, с точностью до величин четвертого и высших порядков, на $\frac{1}{2}(v/V)^2$ сек.

Отсюда вытекает своеобразное следствие. Если в точках ***A*** и ***B*** системы ***K*** помещены покоящиеся синхронно идущие часы, наблюдаемые в покоящейся системе, и если часы из точки ***A*** двигать по линии, соединяющей ее с ***B***, в сторону последней со скоростью ***v***, то по прибытии этих часов в ***B*** они уже не будут более идти синхронно с часами в ***B***. Часы, передвигавшиеся из ***A*** в ***B***, отстают по сравнению с часами, находящимися в ***B*** с самого начала, на $(1/2)\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v}^2/\boldsymbol{V}^2)$ сек (с точностью до величин четвертого и высших порядков), если ***t*** — время, в течение которого часы из ***A*** двигались в ***B***. Сразу видно, что этот результат получается и тогда, когда часы движутся из ***A*** в ***B*** по любой ломаной линии, а также тогда, когда точки ***A*** и ***B*** совпадают.

Если принять, что результат, доказанный для ломаной линии, верен также для непрерывно меняющей свое направление кривой, то получаем следующую теорему.

Если в точке ***A*** находятся двое синхронно идущих часов и мы перемещаем одни из них по замкнутой кривой с постоянной скоростью до тех пор, пока они не вернутся в ***A*** (на что потребуется, скажем, ***t*** сек), то эти часы по прибытии в ***A*** будут отставать по сравнению с часами, остававшимися неподвижными, на $(1/2)t(v/V)^2$. Отсюда можно заключить, что часы с балансиром, находящиеся на земном экваторе, должны идти несколько медленнее, чем точно такие же часы, помещенные на полюсе, но в остальном поставленные в одинаковые условия.

§5. Теорема сложения скоростей

Пусть в системе ***k***, движущейся со скоростью ***v*** вдоль оси ***X*** системы ***K***, движется точка согласно уравнениям

$$\xi = w_\xi \tau,$$

$$\eta = w_\eta \tau,$$

$$\zeta = 0,$$

где w_ξ, w_η — постоянные.

Найдем движение точки относительно системы ***K***. Если в уравнения движения точки с помощью выведенных в §3 формул преобразования ввести величины ***x, y, z, t,*** то получим

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Итак, закон параллелограмма скоростей в нашей теории верен только в первом приближении. Положим

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_y}{w_x};$$

тогда ***α*** надо рассматривать как угол между скоростями ***v*** и ***w***. После простого вычисления получается

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2\,v\,w\cos\alpha) - \left(\frac{v\,w\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\,w\cos\alpha}{V^2}}.$$

Замечательно, что ***v*** и ***w*** входят симметрично в выражение для результирующей скорости. Если **w** тоже имеет направление оси ***X*** (оси **Ξ**), то формула для ***U*** принимает следующий вид:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{V^2}}.$$

Из этого уравнения следует, что результирующая скорость, получающаяся при сложении двух скоростей, которые меньше ***V***, всегда меньше ***V***. Положив ***v*** = ***V*** — ***x***, ***w*** = V — **λ**, где ***x*** и **λ** к обе положительны и меньше ***V***, имеем:

$$U = V\frac{2\,V - \varkappa - \lambda}{2\,V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{V}} < V.$$

Далее следует, что скорость света ***V*** от сложения со скоростью, которая меньше скорости света, не может быть изменена. Для этого случая получается

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

В том случае, когда ***v*** и ***w*** имеют одинаковые направления, мы могли бы получить формулу для ***U*** также путем последовательного применения двух преобразований из §3. Если мы наряду с системами ***K*** и ***k***, фигурирующими в §3, введем еще третью координатную систему ***k'***, движущуюся параллельно системе ***k*** вдоль оси **Ξ** со скоростью ***w***, то получим уравнения, которые связывают величины ***x, y, z, t*** с соответствующими величинами системы ***k'***. Они отличаются от найденных в § 3 только тем, что вместо ***v*** стоит величина

$$\frac{v+w}{1+\frac{vw}{V^2}}$$

Отсюда видно, что такие параллельные преобразования, как это и должно быть, образуют группу.

Таким образом, мы вывели необходимые нам положения кинематики, построенной в соответствии с нашими двумя принципами, и переходим теперь к тому, чтобы показать их применение в электродинамике.

II. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§5. Преобразование уравнений Максвелла-Герца для пустого пространства. О природе электродвижущих сил, возникающих при движении в магнитной поле

Пусть уравнения Максвелла — Герца справедливы для пустого пространства в покоящейся системе ***K***; в таком случае имеем

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

где (***X, У, Z***) — вектор напряженности электрического поля, (***L, M, N***) вектор напряженности магнитного поля.

Если мы применим к этим уравнениям преобразование, которое было получено в §3, и отнесем электромагнитные процессы к введенной там координатной системе, движущейся со скоростью ***v***, то получим уравнения

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \xi},$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Принцип относительности требует, чтобы справедливые в системе ***K*** уравнения Максвелла — Герца для пустоты были бы также справедливы и в системе ***k***; это значит, что для векторов напряженности электрического и магнитного полей [(***X'***, ***Y'***, ***Z'***) и (***Z'***, ***M'*** ***N'***)], определенных в движущейся системе ***k*** через их пондеромоторные действия на электрические заряды, или, соответственно, магнитные массы, должны быть справедливы следующие уравнения:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Обе системы уравнений, найденные для системы $\boldsymbol{k}$, очевидно, должны выражать в точности одно и то же, так как обе системы уравнений эквивалентны уравнениям Максвелла — Герца для системы $\boldsymbol{K}$. Далее, так как уравнения обеих систем совпадают друг с другом во всем за исключением символов, изображающих векторы, то отсюда следует, что функции, стоящие в соответствующих местах обеих систем уравнений, должны быть равны между собой с точностью до множителя $\psi(v)$, общего для всех функций, который не зависит от ξ, η, ζ, τ, но может, вообще говоря, зависеть от v. Итак,

$$X' = \psi(v)X, \qquad L' = \psi(v)L,$$

$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Если обратить эту систему уравнений, во-первых, путем непосредственного решения и, во-вторых, с помощью обратного преобразования (из $\boldsymbol{k}$ в $\boldsymbol{K}$), которое характеризуется скоростью $-v$, и принять во внимание, что обе получившиеся системы должны быть тождественны, то

$$\varphi(v)\cdot\varphi(-v) = 1.$$

Далее из соображений симметрии следует[1]

$$\varphi(v) = \varphi(-v);$$

таким образом,

$$\varphi(v) = 1$$

[1] Если, например, $X = Y = Z = L = M = 0$ и $N \neq 0$, то из соображений симметрии ясно, что, когда v меняет знак без изменения своего численного значения, V должно изменить свой знак также без изменения своего численного значения.

и наши уравнения принимают следующий вид:

$$X' = X, \qquad L' = L,$$

$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad M' = \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \qquad N' = \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Для интерпретации этих уравнений заметим следующее. Пусть имеется точечный заряд, который при измерении в покоящейся системе ***K*** равен «единице», т. е., покоясь относительно покоящейся системы, он на расстоянии 1 см действует с силой в 1 дину на такое же количество электричества. Согласно принципу относительности, этот электрический заряд при измерении в движущейся системе тоже равен «единице». Если это количество электричества находится в покое относительно покоящейся системы, то вектор (***X, Y, Z***), согласно определению, равен силе, действующей на упомянутый заряд. Если же заряд находится в покое относительно движущейся системы (по крайней мере в соответствующий момент времени), то сила, действующая на него и измеренная в движущейся системе, равна вектору (***X', Y', Z'***). Следовательно, первые три из написанных выше уравнений можно сформулировать следующими двумя способами.

1. Если в электромагнитном поле движется единичный точечный заряд, то на него, кроме электрического поля, действует еще «электромоторная сила», которая при условии пренебрежения членами, пропорциональными второй и более высоким степеням ***v/V***, равна деленному на скорость света векторному произведению скорости движения единичного заряда на напряженность магнитного поля. (Старая формулировка.)
2. Если единичный точечный заряд движется в электромагнитном поле, то действующая на него сила равна напряженности электрического поля в месте нахождения этого заряда, получающейся в результате преобразования поля к координатной системе, покоящейся относительно этого заряда. (Новая формулировка.)

Аналогичные положения справедливы для «магнитомоторных сил». Мы видим, что в изложенной теории электромоторная сила играет роль вспомогательного понятия, которое своим введением обязано тому обстоятельству, что электрические и магнитные поля не существуют независимо от состояния движения координатной системы. Ясно, что асимметрия, упомянутая в введении при рассмотрении токов, возникающих вследствие относительного движения магнита и проводника, исчезает. Вопросы о том, где «сидят» электродинамические силы (униполярные машины), также теряют смысл.

§7. Теория аберрации и эффекта Доплера

Пусть в системе ***K*** очень далеко от начала координат находится некоторый источник электродинамических волн, которые в некоторой части пространства, включающей начало координат, могут быть с достаточной степенью точности представлены уравнениями

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, & \quad \Phi = \omega\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right). \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, \end{aligned}$$

Здесь (X_0, Y_0, Z_0), и (L_0, M_0, N_0) представляют собой векторы, определяющие амплитуду цуга волн; ***a, b, c*** — направляющие косинусы нормали к фронту волны.

Выясним теперь, каковы свойства этих волн, когда они исследуются наблюдателем, находящимся в покое относительно движущейся системы ***k***. Применив найденные в §6 формулы преобразования напряженностей электрического и магнитного полей, а также полученные в §3 формулы преобразования координат и времени, получаем:

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi', & L' &= L_0 \sin \Phi', \\ Y' &= \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \sin \Phi', & M' &= \beta\left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \sin \Phi', \\ Z' &= \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \sin \Phi', & N' &= \beta\left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \sin \Phi', \end{aligned}$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

где

$$\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}.$$

Возьмем наблюдателя, движущегося со скоростью **v** относительно бесконечно удаленного источника света, частота которого равна **ʋ**. Из уравнения для **ω′** вытекает, что если угол между линией, соединяющей источник света с наблюдателем, и скоростью наблюдателя, отнесенной к координатной системе (покоящейся относительно источника света), равен **φ**, то воспринимаемая наблюдателем частота **ʋ′** света дается следующей формулой:

$$\nu' = \nu\frac{1 - \cos\varphi\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Это и есть принцип Доплера для любых скоростей. При **φ** = 0 формула принимает более простой вид

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Мы видим, что, в противоположность обычному представлению, при **v** = — ∞ частота **ʋ** = ∞.

Если обозначить через **φ**' угол между нормалью к фронту волны (направлением луча) и линией, соединяющей источник света с наблюдателем, то формула для **φ**' примет вид

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Эта формула выражает закон аберрации в его наиболее общей форме. Если **φ** = **π**/2, то формула принимает простой вид

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Мы должны теперь найти значение амплитуды волн, воспринимаемых наблюдателем в движущейся системе. Обозначив соответственно через ***A*** и ***A'*** амплитуды напряженностей электрического или магнитного полей, измеренные в покоящейся и в движущейся системах, получим

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

Эта соотношение при **φ** = 0 переходит в более простое

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Из выведенных уравнений следует, что наблюдателю, который будет приближаться со скоростью ***V*** к некоторому источнику света, последний будет казаться бесконечно интенсивным.

§8. Преобразование энергии лучей света. Теория давления, производимого светом на идеальное зеркало

Так как $A^2/8\pi$ равняется энергии света в единице объема, то на основании принципа относительности величину $A'^2/8\pi$ мы должны рассматривать как энергию света в движущейся системе. Поэтому величина A'^2/A^2 была бы отношением энергии определенного светового комплекса, «измеренной в движении», к энергии того же комплекса, «измеренной в покое», если бы объем светового комплекса оставался бы одним и тем же при измерении в системах ***k*** и ***K***. Однако это не так. Если ***a, b, c*** представляют собой направляющие косинусы нормалей к фронту световой волны в покоящейся системе, то через элементы поверхности сферы

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2$$

движущейся со скоростью света, не проходит никакая энергия; поэтому мы можем утверждать, что эта поверхность все время ограничивает собой один и тот же световой комплекс. Выясним, какое количество энергии заключено внутри этой поверхности, если наблюдение ведется в системе ***k***; т. е. какова будет энергия этого светового комплекса относительно системы ***k***.

Сферическая поверхность, рассматриваемая в движущейся системе, представляет собой поверхность эллипсоида, уравнение которого в момент времени **τ** = 0 будет

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2.$$

Если через ***S*** обозначить объем шара, а через ***S'*** объем этого эллипсоида, то, как показывает простое вычисление, должно выполняться соотношение

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Обозначая через ***E*** энергию света, заключенную внутри рассматриваемой поверхности и измеренную в покоящейся системе, а через ***E'*** ту же энергию, измеренную в движущейся системе, получаем

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

Эта формула при **φ** = 0 переходит в более простую:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Замечательно то, что и энергия, и частота светового комплекса с изменением состояния движения наблюдателя меняются по одному и тому же закону.

Пусть теперь координатная плоскость $\xi = 0$ представляет собой идеальную зеркальную поверхность, от которой отражаются плоские волны, рассмотренные в предыдущем параграфе. Выясним, чему равно световое давление, производимое на зеркальную поверхность, и каковы направление, частота и интенсивность света после отражения.

Пусть падающий свет характеризуется величинами $\boldsymbol{A}$, $\cos\varphi$, $\boldsymbol{\nu}$ (отнесенными к системе $\boldsymbol{K}$). При наблюдении из системы $\boldsymbol{k}$ для соответствующих величин имеем

$$A' = A\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

J

Если мы отнесем этот процесс к системе $\boldsymbol{k}$, то для отраженного света получим

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Наконец, производя обратное преобразование к системе ***K***, получаем для отраженного света

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Энергия, падающая на единицу поверхности зеркала в единицу времени (измеренная в покоящейся системе), очевидно, равняется $A^2/8\pi(V\cos\varphi - v)$. Энергия, уходящая с единицы поверхности зеркала в единицу времени составляет $A'''^2/8\pi(-V\cos\varphi''' + v)$.

Разность между этими двумя выражениями, согласно принципу сохранения энергии, равна работе, произведенной световым давлением в единицу времени. Приравнивая работу произведению ***Pv***, где ***P*** — световое давление, получаем:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Отсюда в первом приближении получаем в согласии с опытом и с другими теориями

$$P = 2\,\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi\,.$$

Примененным здесь методом могут быть решены все задачи оптики движущихся тел. Существо дела заключается в том, что электрическое и магнитное поля в световой волне, подвергающейся воздействию со стороны движущегося тела, преобразуются к координатной системе, покоящейся относительно этого тела. Благодаря этому каждая задача оптики движущихся тел сводится к задачам оптики покоящихся тел.

§9. Преобразование уравнений Максвелла — Герца

Мы исходим из уравнений:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\varrho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\varrho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\varrho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

где

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

означает умноженную на 4π плотность электрического заряда, а ($\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$, $\boldsymbol{u}_z$) - вектор скорости электрического заряда. Если представить себе, что заряды неизменно связаны с очень малыми твердыми телами (ионы, электроны), то эти уравнения являются основой электродинамики Лоренца и оптики движущихся тел.

Если преобразовать эти уравнения, которые справедливы в системе ***K***, с помощью формул преобразования из §§3 и 6 к системе ***k***, то получаются следующие уравнения:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\,\varrho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\,\varrho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\,\varrho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

где

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi\,,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \quad \varrho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{v\,u_x}{V^2}\right)\varrho\,.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta\,.$$

Таким образом, как это и следует из теоремы сложения скоростей (§5), вектор (u_ξ, u_η, u_ζ) есть не что иное, как скорость электрических зарядов, измеренная в системе ***k***. Тем самым показано, что электродинамическая основа лоренцовской электродинамики движущихся тел подчиняется принципу относительности, если исходить из наших кинематических принципов.

Отметим еще кратко, что из доказанных уравнений легко может быть выведена следующая важная теорема: если электрически заряженное тело движется в пространстве произвольно и если его заряд, наблюдаемый из координатной системы, движущейся вместе с этим телом, при этом не изменяется, то этот заряд остается неизменным и при наблюдении из «покоящейся» системы ***K***.

§ 10. Динамика (слабо ускоренного) электрона

Пусть в электромагнитном поле движется точечная частица с электрическим зарядом **e** (в дальнейшем называемая «электроном»), о законе движения которой мы будем предполагать только следующее.

Если электрон находится в покое в течение определенного промежутка времени, то в ближайший за ним элемент времени движение электрона, поскольку оно является медленным, будет описываться уравнениями:

$$\mu \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon Z,$$

где ***x, y, z*** — координаты электрона, а **μ** — масса электрона.

Далее, пусть электрон в течение определенного промежутка времени обладает скоростью ***v***. Найдем закон, согласно которому электрон движется в непосредственно следующий за этим промежутком элемент времени.

Не ограничивая общности рассуждений, мы можем допустить и допустим на самом деле, что в тот момент, когда мы начинаем наблюдение, наш электрон находится в начале координат и движется вдоль оси ***X*** системы ***K*** со скоростью ***v***. В таком случае ясно, что в указанный момент времени (***t*** = 0) электрон находится в покое относительно координатной системы ***k***, движущейся параллельно оси ***X*** с постоянной скоростью ***V***.

Из сделанного выше предположения в сочетании с принципом относительности следует, что уравнения движения электрона, наблюдаемого из системы ***k*** в течение времени, непосредственно следующего за ***t*** = 0 (при малых значениях ***t***), имеют вид:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d \tau^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d \tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d \tau^2} = \varepsilon Z',$$

где обозначенные через ξ, **η**, ζ, **τ**, ***X', Y' Z'*** величины относятся к системе ***k***. Если к тому же положить, что при ***t*** = ***x*** = ***y*** = ***z*** = 0 должны быть **τ** = ξ = **η** = ζ = 0, то будут справедливы формулы преобразования из §3 и 6 и, следовательно, будут выполняться следующие уравнения:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta\,(x - v\,t), \qquad X' = X,$$

$$\eta = y, \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right),$$

$$\zeta = z, \qquad Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right).$$

С помощью этих уравнений преобразуем написанные движения от системы $\boldsymbol{k}$ к системе $\boldsymbol{K}$ и получим:

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{d t^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu} \dfrac{1}{\beta^3} X, \\ \dfrac{d^2 y}{d t^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu} \dfrac{1}{\beta}\left(Y - \dfrac{v}{V}N\right), \\ \dfrac{d^2 z}{d t^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu} \dfrac{1}{\beta}\left(Z + \dfrac{v}{V}M\right). \end{cases}$$

Опираясь на обычный прием рассуждений определим теперь «продольную» и «поперечную» массы движущегося электрона. Запишем уравнения (A) в следующем виде:

$$\mu\,\beta^3 \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu\,\beta^2 \frac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon\,\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon\,Y',$$

$$\mu\,\beta^2 \frac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon\,\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon\,Z'$$

При этом заметим прежде всего, что $\boldsymbol{\varepsilon X'}$, $\boldsymbol{\varepsilon Y'}$ $\boldsymbol{\varepsilon Z'}$ являются компонентами пондеромоторной силы, действующей на электрон, причем эти компоненты рассматриваются в координатной системе, которая в данный момент движется вместе с электроном с такой же, как у электрона, скоростью. (Эта сила могла бы быть измерена, например, пружинными весами, покоящимися в этой системе.) Если теперь эту силу будем называть просто «силой, действующей на электрон», и сохраним уравнение (для численных значений)

Масса × Ускорение = Сила,

и если мы далее установим, что ускорения должны измеряться в покоящейся системе ***K***, то из указанных выше уравнений получим:

$$\textbf{Продольная масса} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\textbf{Поперечная масса} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Конечно, мы будем получать другие значения для масс при другом определении силы и ускорения; отсюда видно, что при сравнении различных теорий движения электрона нужно быть весьма осторожным. Заметим, что эти результаты относительно массы справедливы также и для нейтральных материальных точек, ибо такая материальная точка может быть путем присоединения *сколь угодно малого* электрического заряда превращена в электрон (в нашем смысле).

Определим кинетическую энергию электрона. Если электрон из начала координат системы ***K*** с начальной скоростью 0 движется все время вдоль оси ***X*** под действием электростатической силы X, то ясно, что взятая у электростатического поля энергия будет равна $\int \varepsilon X dx$. Так как электрон ускоряется медленно и вследствие этого не должен отдавать энергию в форме излучения, то энергия, взятая у электростатического поля, должна быть положена равной энергии движения ***W*** электрона. Принимая во внимание, что в течение всего рассматриваемого процесса движения справедливо первое из уравнений (A), получаем:

$$W = \int \varepsilon X dx = \int_0^v \beta^3 v\, dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

При ***v*** = ***V*** величина ***W*** становится, таким образом, бесконечно большой. Как в прежних результатах, так и здесь, скорости, превышающие скорость света, существовать не могут. Это выражение для кинетической энергии должно быть справедливым и для любых масс в силу приведенного выше аргумента.

Перечислим теперь все вытекающие из системы уравнений (A) свойства движения электрона, допускающие опытную проверку.

1. Из второго уравнения системы (A) следует, что электрическое поле ***Y*** и магнитное поле ***N*** одинаково сильно отклоняют электрон, движущийся со скоростью ***v***, в том случае, когда **Y — *N v/V***. Отсюда видно, что, согласно нашей теории, для любых скоростей можно определить скорость электрона из отношения отклонения магнитным полем A_m к отклонению электрическим полем A_e, если применить закон:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Это соотношение поддается экспериментальной проверке, так как скорость электрона может быть измерена также и непосредственно, например, при помощи быстропеременных электрических и магнитных полей.

2. Из формулы для кинетической энергии электрона следует, что между пройденной разностью потенциалов ***P*** и достигнутой скоростью ***v*** электрона должно существовать следующее соотношение:

$$P = \int X\,dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Вычислим радиус кривизны ***R*** орбиты, когда имеется перпендикулярное скорости электрона магнитное поле напряженностью ***N*** (как единственная отклоняющая сила).

Из второго уравнения (A) получаем

$$-\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

или

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Эти три соотношения являются полным выражением законов, по которым, согласно предложенной теории, должны двигаться электроны.

В заключение отмечу, что мой друг и коллега М. Бессо явился верным помощником при разработке изложенных здесь проблем и что я обязан ему за ряд ценных указаний.

Поступила 30 июня 1905 г.

* * *

Это первая (и основная) работа Эйнштейна по теории относительности. До этой статьи Эйнштейном в 1901—1905 гг. были опубликованы восемь работ по молекулярной физике и теории света (они будут помещены в третьем томе). Статья включена в сборник 1913 года (Н. A. Lorentz. Das Relativitatsprinzip, eine Sammlung von Abbandlungen. Leipzig, Teubner, 1913). Сборник несколько раз переиздавался и переводился на английский и французский языки. Английский перевод сборника был издан в Англии (Н. A. Lorentz. The Principle of Relativity, a collection of original memories. London, Methuen, 1923), а также в Индии (The principle of Relativity. Original papers, by A. Einstein and H. Minkowski, Calcutta, 1920).

Французский перевод статьи (перевод М. Соловина) издан в 1925 г. (Paris, Gauthier). Русский перевод был опубликован под редакцией В. К. Фредерикса и Д.Д.Иваненко в 1936 г. (Принцип относительности. Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн и Г. Минковский. ОНТИ, 1935).

Эйнштейн, А. Собр. науч. тр. в 4 тт. Т. 1. Работы по теории относительности. 1905-1920. - М.: Наука. 1965. С.56-57.

Примечание.

— Ребят, как же это вы без гравицапы пепелац выкатываете из гаража? Это непорядок...

Понадобилось мне сослаться на одно место из этой работы А.Эйнштейна и я с удивлением выяснил, что приличного русского варианта в Рунете нет. Нашел только pdf с кривыми (в буквальном смысле) сканами.

Непорядок. Пришлось повозиться и сделать то, что я полагаю приличным. Формулы можно было тоже типографским шрифтом сделать, но ради историчности они взяты из сканов оригинальной первой публикации.

Хотя я тщательно сверял текст, на 100% исключить возможность ошибки при воспроизведении не могу. Если кто-либо таковую обнаружит, прошу сообщить по адресу, приведенному на сайте.

- im.